

BAREM DE NOTARE ȘI CORECTARE

Clasa a X-a

Partea I

1. C; 2. B; 3. D; 4. A; 5. D

Partea a II-a

Problema 1 (20 puncte)

$$49 + 20\sqrt{6} = (5 + \sqrt{24})^2 = (5 + 2\sqrt{6})^2 = ((\sqrt{3} + \sqrt{2})^2)^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 \dots\dots\dots 3p$$

$$49 - 20\sqrt{6} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4, 144 = 12^2 = (\sqrt{12})^4 = (2\sqrt{3})^4 \dots\dots\dots 3p$$

Ecuția se scrie

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\frac{4}{n}} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\frac{4}{n}} = (2\sqrt{3})^{\frac{4}{n}}, \dots\dots\dots 3p$$

sau, cu notația $x = \frac{4}{n}$, obținem $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = (2\sqrt{3})^x \dots\dots\dots$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^x = 1. (*) \dots\dots\dots 3p$$

Dacă $a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$, atunci $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 1 - a$. Deoarece $\frac{1}{2} < a < 1$, avem și $0 < 1-a < a < 1 \dots\dots\dots 2p$

Atunci, funcția $f(x) = a^x + (1-a)^x$ este strict descrescătoare pe **R** ca sumă a două funcții exponențiale strict descrescătoare pozitive.....2p

Rezultă că ecuația (*) are cel mult o soluție.....2p

Cum $x=1$ verifică ecuația, avem soluția unică pentru ecuația din enunț $n=4$2p

Problema 2 (20 puncte)

$$\frac{y^2 + z^2 + y + z}{4} \geq \sqrt[4]{y^3 z^3}. (*) \dots\dots\dots 5p$$

$$\log_x \frac{y^2 + z^2 + y + z}{4} \geq \frac{3}{4} (\log_x y + \log_x z) \dots\dots\dots 5p$$

$$(\log_x y + \log_y x) + (\log_y z + \log_z y) + (\log_x z + \log_z x) \geq 6 \dots\dots\dots 5p$$

Găsirea inegalității și justificarea că este strictă5p